

allons donner deux exemples. Nous allons imaginer que ces courbes sont parcourues par un point P en mouvement et examiner d'abord la rapidité du déplacement de ce point mobile de coordonnées $p(t)$ sur une courbe de Peano.

Le point $p(t)$ doit aller très vite pour passer par tous les points du carré. Puisqu'une courbe de Peano a nécessairement une longueur infinie, la vitesse du point $p(t)$ est infinie, ce qui est impossible pour un physicien, mais envisageable pour un mathématicien. En fait, non seulement la longueur totale de la courbe est infinie, mais si vous choisissez deux points du carré $p(t)$ et $p(t')$, même si t et t' sont très proches, la longueur du morceau de courbe joignant $p(t)$ à $p(t')$ est infinie : tous les points sont deux à deux à distance infinie pour celui qui suit la courbe !

Une fonction, que l'on peut assimiler à une sorte de vitesse moyenne entre deux instants t et t' (avec $t' > t$), est donnée par le quotient : $V(t, t') = d^2(p(t), p(t')) / (t' - t)$ où d désigne la distance habituelle entre deux points du plan.

Il est clair que ce nombre $V(t, t')$ est parfois supérieur à 2. Si on note C_1, C_2 , deux coins opposés du carré, et t_1 et t_2 ($t_2 > t_1$), les instants où le point $p(t)$ est en C_1 et en C_2 , on a $V(t_1, t_2) = d^2(C_1, C_2) / (t_2 - t_1) \geq d^2(C_1, C_2) / 1 = 2$. L'inégalité provient du fait que le dénominateur est inférieur à 1 puisque t_1 et t_2 sont deux nombres entre 0 et 1 (l'égalité correspond au cas où le point P part de C_1 à l'instant 0 et arrive en C_2 à l'instant 1). Le numérateur est

égal à 2 (le côté du carré est de longueur 1 et la diagonale de longueur $\sqrt{2}$). Cette sorte de vitesse entre deux points est finie, car elle néglige en quelque sorte les détours que fait $p(t)$ entre t et t' .

La question est de savoir si on peut améliorer ce 2, c'est-à-dire trouver une valeur minimale Min supérieure à 2 telle que, pour toute courbe de Peano, $V(t, t')$ dépasse Min pour certains couples (t, t') . Le problème est géométrique. Un premier résultat trouvé en 2004 dû à Evgeny Shchepin, de l'université d'État Lomonossov de Moscou, a montré que, pour toute courbe de Peano, $V(t, t')$ est nécessairement supérieur à $Min_1 = 3,5$ pour certains couples (t, t') . En 2021, Evgeny Shchepin et son collègue Eugene Mychka ont amélioré le résultat en prouvant que 3,5 pouvait être remplacé par $Min_2 = 3 + 5/8 = 3,625$, et que si on ajoute l'hypothèse que le point de départ de la courbe de Peano et le point d'arrivée de la courbe sont sur deux côtés opposés du carré, alors le minimum passe de 3,625 à 4.

Il est intéressant de constater, et c'est là le cœur des travaux d'Evgeny Shchepin et de ses collègues, que si la vitesse instantanée est nécessairement infinie, il est cependant difficile de montrer que la pseudo-vitesse $V(t, t')$ entre deux points dépasse une certaine valeur finie.

Un second résultat récent dû à Yuri Malykhin et Evgeny Shchepin complète le précédent. Il concerne les courbes de Peano les moins agitées possible, c'est-à-dire celles pour

2

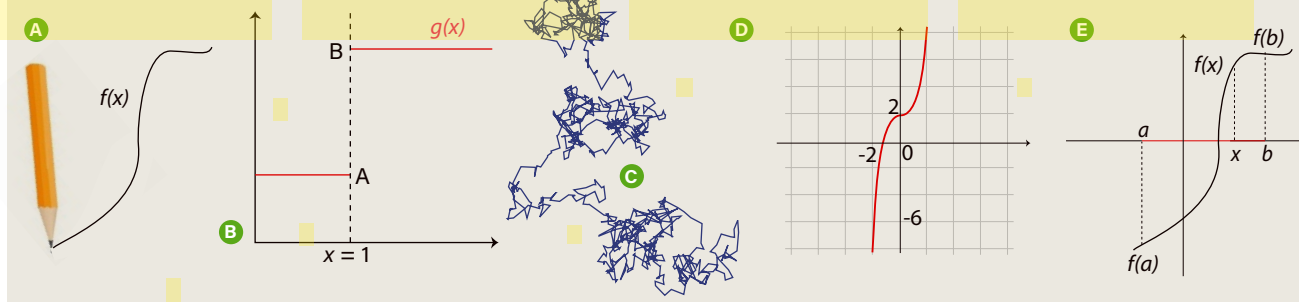
FONCTIONS CONTINUES, VALEURS INTERMÉDIAIRES, FONCTIONS DE DARBOUTX

Une fonction $f(x)$ est continue si on peut la tracer sans lever le crayon (A) ; plus précisément, si à des variations infinitésimales de la variable x correspondent des variations infinitésimales de la valeur $f(x)$. La fonction $g(x)$ est discontinue (B) car elle saute de A à B pour $x = 1$. Le mouvement brownien (C) est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans

un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule, qui a été décrit pour la première fois en 1827 par le botaniste Robert Brown. Le mouvement brownien est un exemple de fractale aléatoire, ces courbes continues et qui n'ont de tangente nulle part. La courbe de Peano est une

sorte de mouvement brownien régulier. Le théorème des valeurs intermédiaires stipule que si une fonction $f(x)$ est continue sur un intervalle de nombres réels $[a, b]$ et prend deux valeurs $f(a) = m$ et $f(b) = n$, alors elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre m et n . Ainsi, un polynôme de degré impair, comme $f(x) = x^3 + 2$, a toujours une racine réelle (D). En effet quand $x = -2$, $f(x) = -6$ et quand $x = 0$, $f(x) = 2$.

Les fonctions $f(x)$ qui pour tout a et b , avec $a < b$, passent par toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont nommées « fonctions de Darboux », en l'honneur du mathématicien français Gaston Darboux. Le théorème des valeurs intermédiaires indique que si $f(x)$ est continue sur un intervalle des nombres réels, alors c'est une fonction de Darboux (E). Mais si toutes les fonctions continues sont des fonctions de Darboux, la réciproque est fautive.



3

LE THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES : DEUX APPLICATIONS

La première, très classique, est la suivante. Si le lundi vous parcourez un chemin à pied de A à B entre 9 heures et 18 heures et que le lendemain vous revenez de B en A par le même chemin entre 9 heures et 18 heures, il existe un point de la route où vous êtes passé exactement à la même heure le lundi et le mardi. En effet : soit d la distance entre A et B ; votre distance $f(t)$ de A en fonction du temps est continue et vaut 0 le lundi à 9 heures et d à 18 heures : $f(9) = 0$ et $f(18) = d$. La fonction $g(t)$ du mardi est elle aussi continue et vérifie $g(9) = d$ et $g(18) = 0$. La fonction $h(t) = g(t) - f(t)$ est donc continue et vérifie $h(9) = d$ et $h(18) = -d$. Elle vaut donc 0 en un point t_m entre 9 et 18, point où on a $f(t_m) = g(t_m)$, ce qui signifie qu'à l'heure t_m le lundi et le mardi vous êtes exactement au même point M du parcours (voir A). Plus amusante encore, la conséquence suivante du théorème des valeurs intermédiaires est vraiment inattendue. Il s'agit cette fois d'une histoire de table bancale. Vous êtes installé sur la terrasse d'un café et, à cause du sol un peu irrégulier, la table carrée devant vous n'est pas stable et ballote sur deux pieds. La méthode classique pour supprimer le désagrément consiste à prendre un papier ou un carton et à tenter de le plier et à le glisser pour combler l'espace entre le pied qui ne touche pas le sol et le sol. En général, il faut s'y prendre plusieurs fois et ensuite être attentif à ne pas faire sauter la calle improvisée. Il existe une méthode plus simple : en laissant le centre de la table à la verticale du même point, faites-la tourner. Avant que la table n'ait pivoté de 90° , vous trouverez une position où les quatre pieds toucheront le sol, ce qui la stabilisera (B).

Voici le raisonnement fondé sur le théorème des valeurs intermédiaires qui démontre l'affirmation. Avant de raisonner, précisons les hypothèses. Nous supposons (a) que les irrégularités du sol sont assez lisses et raisonnables en amplitude, autrement dit que la surface du sol est bosselée mais pas trop et continue, et (b) que le problème ne vient pas des pieds de la table dont on suppose que les quatre extrémités sont chacune réduites à un point et forment un carré parfait. Notons A, B, C et D les quatre extrémités des pieds de la table. Si la table n'est pas stable, c'est que deux des pieds diamétralement opposés, par exemple A et C, reposent sur le sol, et que selon qu'on appuie sur l'un des deux autres B ou D, c'est B qui touche le sol (ou D), mais pas l'autre. Quand on fait pivoter la table d'un angle a et qu'on la laisse toucher le sol, notons la hauteur $f(a)$ qui manque sous le pied qui ne touche pas le sol en B ou D quand l'autre touche le sol. Notons $g(a)$ la hauteur qui manque sous le pied A ou C quand ce sont eux qui créent l'instabilité. Quand la table est dans sa position initiale $f(0) > 0$ et $g(0) = 0$. Quand l'angle a atteint 90° , la table a pivoté d'un quart de tour et donc les quatre pieds de la table se retrouvent dans la position de départ sauf que : A est passé en B, B en C, C en D, et D en A. Cela signifie que maintenant c'est B et D qui touchent le sol et A et C qui créent le problème. Autrement dit : $f(90^\circ) = 0$, et $g(90^\circ) > 0$. La fonction $f(a) - g(a)$ qui, d'après nos hypothèses, est continue quand a varie de 0 à 90° est donc passée d'une valeur positive à une valeur négative. Elle a donc pris une valeur nulle pour un certain angle a_0 . Comme à chaque instant l'une des deux valeurs $f(a)$ ou $g(a)$ est nulle, c'est que nécessairement $f(a_0) = 0$

et $g(a_0) = 0$ et donc que les quatre pieds touchent le sol pour a_0 . Le problème fut posé la première fois par Martin Gardner en mai 1973 dans sa rubrique de *Scientific American*. Il lui avait été envoyé par Miodrag Novakovic, un lecteur habitant Belgrade. Gardner en donne une solution un peu différente de celle présentée ici, et a dû préciser plus tard quelques hypothèses oubliées dans l'énoncé initial, dont celle que les extrémités des pieds doivent former un carré. Cette hypothèse est nécessaire car il est en effet évident que si le sol est parfaitement plat et que l'un des quatre pieds est plus court que les trois autres, alors faire tourner la table ne sert à rien et jamais on ne fera toucher le sol aux quatre pieds simultanément. L'hypothèse que les quatre pieds forment un carré est importante et elle est utilisée quand on dit qu'après avoir opéré la rotation de 90° , la table se trouve dans une position équivalente à celle de départ en échangeant les rôles de A-C et de B-D. De la preuve rapide en quelques phrases, comme celle de Martin Gardner ou celle proposée ici à une solution mathématique en tout point rigoureuse précisant bien toutes les hypothèses, le chemin est parfois assez long. Ce n'est en effet qu'en 2007, soit trente-quatre ans après l'article de Gardner, que, dans la revue *The Mathematical Intelligencer*, Bill Baritomp, Rainer Löwen, Burkard Polster et Marty Ross ont publié un article vraiment précis et complet donnant tous les détails des hypothèses nécessaires, ainsi que ceux de la démonstration pour le problème de la table. Une remarquable présentation vidéo du problème par Burkard Polster est disponible sur internet (voir la bibliographie).

