

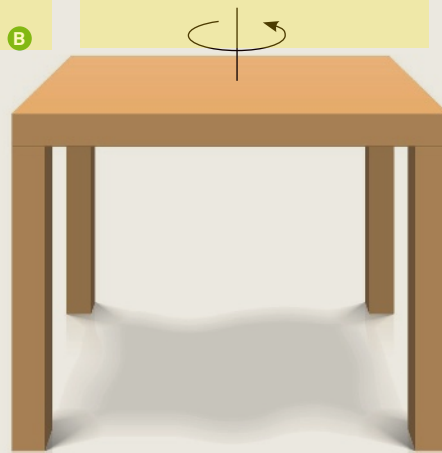
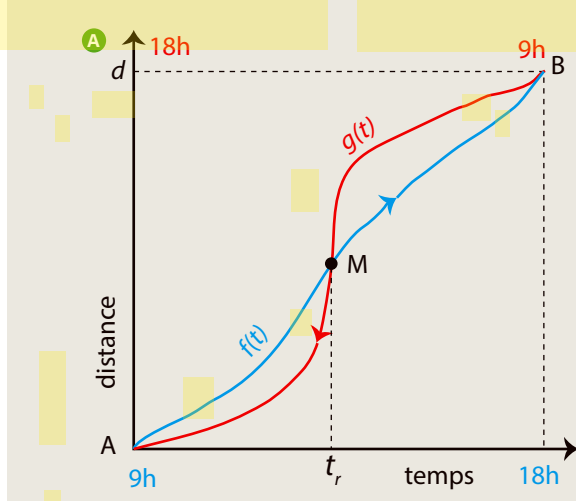
3

LE THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES : DEUX APPLICATIONS

La première, très classique, est la suivante. Si le lundi vous parcourez un chemin à pied de A à B entre 9 heures et 18 heures et que le lendemain vous revenez de B en A par le même chemin entre 9 heures et 18 heures, il existe un point de la route où vous êtes passé exactement à la même heure le lundi et le mardi. En effet : soit d la distance entre A et B ; votre distance $f(t)$ de A en fonction du temps est continue et vaut 0 le lundi à 9 heures et d à 18 heures : $f(9) = 0$ et $f(18) = d$. La fonction $g(t)$ du mardi est elle aussi continue et vérifie $g(9) = d$ et $g(18) = 0$. La fonction $h(t) = g(t) - f(t)$ est donc continue et vérifie $h(9) = d$ et $h(18) = -d$. Elle vaut donc 0 en un point t_m entre 9 et 18, point où on a $f(t_m) = g(t_m)$, ce qui signifie qu'à l'heure t_m le lundi et le mardi vous êtes exactement au même point M du parcours (voir A). Plus amusante encore, la conséquence suivante du théorème des valeurs intermédiaires est vraiment inattendue. Il s'agit cette fois d'une histoire de table bancale. Vous êtes installé sur la terrasse d'un café et, à cause du sol un peu irrégulier, la table carrée devant vous n'est pas stable et ballote sur deux pieds. La méthode classique pour supprimer le désagrément consiste à prendre un papier ou un carton et à tenter de le plier et à le glisser pour combler l'espace entre le pied qui ne touche pas le sol et le sol. En général, il faut s'y prendre plusieurs fois et ensuite être attentif à ne pas faire sauter la calle improvisée. Il existe une méthode plus simple : en laissant le centre de la table à la verticale du même point, faites-la tourner. Avant que la table n'ait pivoté de 90° , vous trouverez une position où les quatre pieds toucheront le sol, ce qui la stabilisera (B).

Voici le raisonnement fondé sur le théorème des valeurs intermédiaires qui démontre l'affirmation. Avant de raisonner, précisons les hypothèses. Nous supposons (a) que les irrégularités du sol sont assez lisses et raisonnables en amplitude, autrement dit que la surface du sol est bosselée mais pas trop et continue, et (b) que le problème ne vient pas des pieds de la table dont on suppose que les quatre extrémités sont chacune réduites à un point et forment un carré parfait. Notons A, B, C et D les quatre extrémités des pieds de la table. Si la table n'est pas stable, c'est que deux des pieds diamétralement opposés, par exemple A et C, reposent sur le sol, et que selon qu'on appuie sur l'un des deux autres B ou D, c'est B qui touche le sol (ou D), mais pas l'autre. Quand on fait pivoter la table d'un angle α et qu'on la laisse toucher le sol, notons la hauteur $f(\alpha)$ qui manque sous le pied A ou C quand ce sont eux qui créent l'instabilité. Quand la table est dans sa position initiale $f(0) > 0$ et $g(0) = 0$. Quand l'angle α atteint 90° , la table a pivoté d'un quart de tour et donc les quatre pieds de la table se retrouvent dans la position de départ sauf que : A est passé en B, B en C, C en D, et D en A. Cela signifie que maintenant c'est B et D qui touchent le sol et A et C qui créent le problème. Autrement dit : $f(90^\circ) = 0$, et $g(90^\circ) > 0$. La fonction $f(\alpha) - g(\alpha)$ qui, d'après nos hypothèses, est continue quand α varie de 0 à 90° est donc passée d'une valeur positive à une valeur négative. Elle a donc pris une valeur nulle pour un certain angle α_0 . Comme à chaque instant l'une des deux valeurs $f(\alpha)$ ou $g(\alpha)$ est nulle, c'est que nécessairement $f(\alpha_0) = 0$

et $g(\alpha_0) = 0$ et donc que les quatre pieds touchent le sol pour α_0 . Le problème fut posé la première fois par Martin Gardner en mai 1973 dans sa rubrique de *Scientific American*. Il lui avait été envoyé par Miodrag Novakovic, un lecteur habitant Belgrade. Gardner en donne une solution un peu différente de celle présentée ici, et a dû préciser plus tard quelques hypothèses oubliées dans l'énoncé initial, dont celle que les extrémités des pieds doivent former un carré. Cette hypothèse est nécessaire car il est en effet évident que si le sol est parfaitement plat et que l'un des quatre pieds est plus court que les trois autres, alors faire tourner la table ne sert à rien et jamais on ne fera toucher le sol aux quatre pieds simultanément. L'hypothèse que les quatre pieds forment un carré est importante et elle est utilisée quand on dit qu'après avoir opéré la rotation de 90° , la table se trouve dans une position équivalente à celle de départ en échangeant les rôles de A-C et de B-D. De la preuve rapide en quelques phrases, comme celle de Martin Gardner ou celle proposée ici à une solution mathématique en tout point rigoureuse précisant bien toutes les hypothèses, le chemin est parfois assez long. Ce n'est en effet qu'en 2007, soit trente-quatre ans après l'article de Gardner, que, dans la revue *The Mathematical Intelligencer*, Bill Baritomp, Rainer Löwen, Burkard Polster et Marty Ross ont publié un article vraiment précis et complet donnant tous les détails des hypothèses nécessaires, ainsi que ceux de la démonstration pour le problème de la table. Une remarquable présentation vidéo du problème par Burkard Polster est disponible sur internet (voir la bibliographie).



LA FONCTION DIVINE DE CONWAY

4

John Conway a inventé une fonction très étonnante qui passe partout dans $\mathbb{R}$ dans un intervalle de temps aussi petit qu'il soit. Détaillons sa construction.

Soit un nombre réel t . On l'écrit en base de numération 13. Cette base exotique et surprenante va nous servir pour définir des règles. Du nombre t , on ne retient que les chiffres placés après la virgule. Ils constituent une suite infinie $a_0 a_1 \dots a_i \dots$ où chaque a_i est un élément de la liste des chiffres possibles en base 13 : 0, 1, ..., 9, A, B, C. Les chiffres A, B et C sont les trois nouveaux chiffres qu'il faut ajouter aux chiffres du système décimal pour calculer en base 13, ils représentent respectivement 10, 11, et 12 unités.

- Si la suite $a_0 a_1 \dots a_i \dots$ est de la forme $b_1 \dots b_n A c_1 \dots c_m C d_1 \dots d_k \dots$ avec les b_i quelconques et les c_i et les d_i pris seulement parmi 0, 1, ..., 9, alors on pose $f(t) = + c_1 \dots c_m d_1 \dots d_k \dots$ en lisant cette fois la suite de symboles comme un nombre réel écrit en base 10 avec une virgule.

- Si la suite $a_0 a_1 \dots a_i \dots$ est de la forme $b_1 \dots b_n B c_1 \dots c_m C d_1 \dots d_k \dots$ avec les b_i quelconques et les c_i et les d_i pris seulement parmi 0, 1, ..., 9, alors on pose $f(t) = - c_1 \dots c_m d_1 \dots d_k \dots$ en lisant la suite de symboles comme un nombre réel négatif écrit en base 10 avec une virgule.

- Sinon, on pose $f(t) = 0$. Dit autrement : si dans la suite des chiffres après la virgule dans l'écriture de t en base 13, à partir d'un certain chiffre il n'y plus qu'un seul A et un seul C, le A avant le C, et pas de B, on oublie ce qui est devant ce A, on lit le C comme un +, on lit le C comme une virgule et le tout comme si c'était un nombre en base 10. Même chose

avec B et C à la place de A et C, avec pour résultat un nombre négatif. Si on n'est dans aucun de ces deux cas, on pose $f(t) = 0$.

Exemple. Soit le nombre t dont le développement en base 13 est

7B9,4A2ABC34A3C1411... 11...

On ne retient dans un premier temps que la suite de chiffres après la virgule **4A2ABC34A3C1411... 11...**

On repère les derniers A et C, s'il y en a qui ne sont suivis par aucun chiffre A, B, C.

C'est le cas ici. On oublie ce qui est devant le A repéré. Cela donne **A3C1411... 11...** ;

on transforme le A en + et le C en virgule. On arrive alors à + 3,1411... 11... qu'on lit

comme un nombre en base 10. C'est la valeur de la fonction de Conway au point t .

Démontrons maintenant que f possède la propriété extravagante annoncée.

Quels que soient les nombres réels r et s avec $r < s$, et quel que soit le nombre réel y , il existe un nombre t entre r et s tel que $f(t) = y$.

La démonstration est très rapide... même s'il faut se concentrer un peu !

Soit un nombre y qui en base 10 s'écrit $+ c_1 \dots c_m d_1 \dots d_k \dots$ (pour un nombre négatif le raisonnement s'adapte sans mal). On veut

trouver un nombre t tel que $f(t) = y$. On prend pour t un nombre dont l'écriture

en base 13 est de la forme suivante **S** $e_1 \dots e_n b_1 \dots b_n A c_1 \dots c_m C d_1 \dots d_k \dots$ où **S** est le signe

+ ou -. Un tel nombre t a bien pour image par f le nombre y voulu (relire la définition).

On peut maintenant choisir comme on veut le signe de t et toute la partie $e_1 \dots e_n b_1 \dots b_n$.

Cela permet de placer t dans l'intervalle des nombres entre r et s . La démonstration est finie !



John Horton Conway
(1937-2020)

lesquelles $V(t, t')$ ne dépasse jamais une valeur donnée. Ce sont en quelque sorte des courbes de Peano économes : elles font le travail de recouvrir le carré $[0, 1] \times [0, 1]$, sans jamais aller inutilement vite.

Pour établir leur résultat, les chercheurs considèrent la classe des courbes de Peano décomposables en sous-trajets identiques au trajet global. La courbe initiale de Peano (voir l'encadré 1) se décompose en 9 morceaux semblables pour l'essentiel à la courbe initiale avec une réduction dans un rapport de 3 à 1. C'est la nature fractale et autosimilaire de la courbe de Peano qui permet une telle décomposition. Le nombre de composants est le « genre » de la courbe de Peano : il est donc de 9 pour la courbe proposée en 1890 par Peano.

Yuri Malykhin et Evgeny Shchepin ont découvert une nouvelle courbe de Peano dénommée YE, selon les initiales de leurs prénoms. Cette courbe (voir l'encadré 1), qui est de genre 25, est telle que $V(t, t')$ ne dépasse jamais $5 + 43/73 = 5,589041\dots$ Cette valeur, d'après leur démonstration, est la plus petite qu'on puisse obtenir en considérant des courbes de Peano de genre inférieur à 36. De plus, la courbe YE est unique aux symétries près, ce qui fait d'elle une courbe optimale vraiment singulière.

VALEURS INTERMÉDIAIRES

Le point mobile sur une courbe de Peano est localement très agité, mais sans nécessairement beaucoup se déplacer : le point bouge quasiment sur place en changeant sans cesse de direction et passe lentement d'une zone à une autre du carré. Cependant comme la fonction $p(t) = (x(t), y(t))$ pour toute courbe de Peano est continue, on peut être certain que chacune des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ vérifie le célèbre théorème des « valeurs intermédiaires ». Ce théorème affirme que si la valeur d'une fonction f est un nombre réel (appartenant à l'ensemble $\mathbb{R}$) et que cette fonction est continue sur un intervalle $I = [a, b]$ alors pour chaque valeur C entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe une valeur de c dans $[a, b]$, telle que $f(c) = C$.

Ce théorème de base de l'analyse est étrange car il semble évident : si f est continue, elle ne fait pas de saut ! Cependant cette évidence est illusoire, car par exemple si on considère les fonctions continues qui envoient un nombre rationnel (un quotient de nombres entiers) de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels dans le même ensemble $\mathbb{Q}$, le théorème des valeurs intermédiaires est faux. Ainsi, par exemple, la fonction $f(x) = x^2 - 2$ est continue sur l'ensemble des nombres rationnels entre 0 et 2 et on a $f(0) = -2$, $f(2) = 2$; il n'y a aucun nombre rationnel x tel que $f(x) = 0$, puisque la solution de $x^2 - 2 = 0$, le nombre $\sqrt{2}$, est irrationnel.