

LA FONCTION DIVINE DE CONWAY

4

John Conway a inventé une fonction très étonnante qui passe partout dans $\mathbb{R}$ dans un intervalle de temps aussi petit qu'il soit. Détaillons sa construction.

Soit un nombre réel t . On l'écrit en base de numération 13. Cette base exotique et surprenante va nous servir pour définir des règles. Du nombre t , on ne retient que les chiffres placés après la virgule. Ils constituent une suite infinie $a_0 a_1 \dots a_i \dots$ où chaque a_i est un élément de la liste des chiffres possibles en base 13 : 0, 1, ..., 9, A, B, C. Les chiffres A, B et C sont les trois nouveaux chiffres qu'il faut ajouter aux chiffres du système décimal pour calculer en base 13, ils représentent respectivement 10, 11, et 12 unités.

- Si la suite $a_0 a_1 \dots a_i \dots$ est de la forme $b_1 \dots b_n A c_1 \dots c_m C d_1 \dots d_k \dots$ avec les b_i quelconques et les c_i et les d_i pris seulement parmi 0, 1, ..., 9, alors on pose $f(t) = + c_1 \dots c_m d_1 \dots d_k \dots$ en lisant cette fois la suite de symboles comme un nombre réel écrit en base 10 avec une virgule.

- Si la suite $a_0 a_1 \dots a_i \dots$ est de la forme $b_1 \dots b_n B c_1 \dots c_m C d_1 \dots d_k \dots$ avec les b_i quelconques et les c_i et les d_i pris seulement parmi 0, 1, ..., 9, alors on pose $f(t) = - c_1 \dots c_m d_1 \dots d_k \dots$ en lisant la suite de symboles comme un nombre réel négatif écrit en base 10 avec une virgule.

- Sinon, on pose $f(t) = 0$. Dit autrement : si dans la suite des chiffres après la virgule dans l'écriture de t en base 13, à partir d'un certain chiffre il n'y plus qu'un seul A et un seul C, le A avant le C, et pas de B, on oublie ce qui est devant ce A, on lit le A comme un +, on lit le C comme une virgule et le tout comme si c'était un nombre en base 10. Même chose

avec B et C à la place de A et C, avec pour résultat un nombre négatif. Si on n'est dans aucun de ces deux cas, on pose $f(t) = 0$.

Exemple. Soit le nombre t dont le développement en base 13 est

7B9,4A2ABC34A3C1411... 11...

On ne retient dans un premier temps que la suite de chiffres après la virgule **4A2ABC34A3C1411... 11...**

On repère les derniers **A** et **C**, s'il y en a qui ne sont suivis par aucun chiffre **A**, **B**, **C**.

C'est le cas ici. On oublie ce qui est devant le **A** repéré. Cela donne **A3C1411... 11...** ;

on transforme le **A** en + et le **C** en virgule. On arrive alors à $+3,1411... 11...$ qu'on lit comme un nombre en base 10. C'est la valeur de la fonction de Conway au point t .

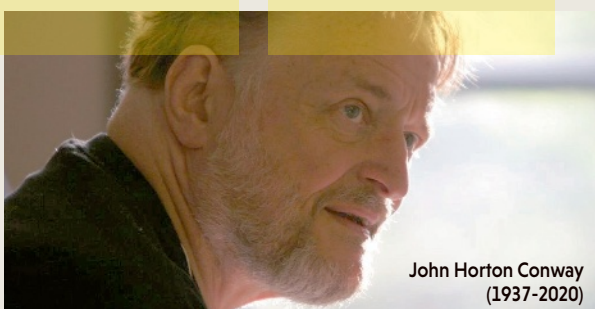
Démontrons maintenant que f possède la propriété extravagante annoncée.

Quels que soient les nombres réels r et s avec $r < s$, et quel que soit le nombre réel y , il existe un nombre t entre r et s tel que $f(t) = y$.

La démonstration est très rapide... même s'il faut se concentrer un peu !

Soit un nombre y qui en base 10 s'écrit $+ c_1 \dots c_m d_1 \dots d_k \dots$ (pour un nombre négatif le raisonnement s'adapte sans mal). On veut trouver un nombre t tel que $f(t) = y$. On prend pour t un nombre dont l'écriture en base 13 est de la forme suivante **S** $e_1 \dots e_n b_1 \dots b_n$ **A** $c_1 \dots c_m$ **C** $d_1 \dots d_k \dots$ où **S** est le signe + ou -. Un tel nombre t a bien pour image par f le nombre y voulu (relire la définition).

On peut maintenant choisir comme on veut le signe de t et toute la partie $e_1 \dots e_n b_1 \dots b_n$. Cela permet de placer t dans l'intervalle des nombres entre r et s . La démonstration est finie !



John Horton Conway
(1937-2020)

lesquelles $V(t, t')$ ne dépasse jamais une valeur donnée. Ce sont en quelque sorte des courbes de Peano économes : elles font le travail de recouvrir le carré $[0, 1] \times [0, 1]$, sans jamais aller inutilement vite.

Pour établir leur résultat, les chercheurs considèrent la classe des courbes de Peano décomposables en sous-trajets identiques au trajet global. La courbe initiale de Peano (voir l'encadré 1) se décompose en 9 morceaux semblables pour l'essentiel à la courbe initiale avec une réduction dans un rapport de 3 à 1. C'est la nature fractale et autosimilaire de la courbe de Peano qui permet une telle décomposition. Le nombre de composants est le « genre » de la courbe de Peano : il est donc de 9 pour la courbe proposée en 1890 par Peano.

Yuri Malykhin et Evgeny Shchepin ont découvert une nouvelle courbe de Peano dénommée YE, selon les initiales de leurs prénoms. Cette courbe (voir l'encadré 1), qui est de genre 25, est telle que $V(t, t')$ ne dépasse jamais $5 + 43/73 = 5,589041...$ Cette valeur, d'après leur démonstration, est la plus petite qu'on puisse obtenir en considérant des courbes de Peano de genre inférieur à 36. De plus, la courbe YE est unique aux symétries près, ce qui fait d'elle une courbe optimale vraiment singulière.

VALEURS INTERMÉDIAIRES

Le point mobile sur une courbe de Peano est localement très agité, mais sans nécessairement beaucoup se déplacer : le point bouge quasiment sur place en changeant sans cesse de direction et passe lentement d'une zone à une autre du carré. Cependant comme la fonction $p(t) = (x(t), y(t))$ pour toute courbe de Peano est continue, on peut être certain que chacune des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ vérifie le célèbre théorème des « valeurs intermédiaires ». Ce théorème affirme que si la valeur d'une fonction f est un nombre réel (appartenant à l'ensemble $\mathbb{R}$) et que cette fonction est continue sur un intervalle $I = [a, b]$ alors pour chaque valeur C entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe une valeur de c dans $[a, b]$, telle que $f(c) = C$.

Ce théorème de base de l'analyse est étrange car il semble évident : si f est continue, elle ne fait pas de saut ! Cependant cette évidence est illusoire, car par exemple si on considère les fonctions continues qui envoient un nombre rationnel (un quotient de nombres entiers) de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels dans le même ensemble $\mathbb{Q}$, le théorème des valeurs intermédiaires est faux. Ainsi, par exemple, la fonction $f(x) = x^2 - 2$ est continue sur l'ensemble des nombres rationnels entre 0 et 2 et on a $f(0) = -2$, $f(2) = 2$; il n'y a aucun nombre rationnel x tel que $f(x) = 0$, puisque la solution de $x^2 - 2 = 0$, le nombre $\sqrt{2}$, est irrationnel.