

LA FONCTION DIVINE DE CONWAY

4

John Conway a inventé une fonction très étonnante qui passe partout dans $\mathbb{R}$ dans un intervalle de temps aussi petit qu'il soit. Détaillons sa construction.

Soit un nombre réel t . On l'écrit en base de numération 13. Cette base exotique et surprenante va nous servir pour définir des règles. Du nombre t , on ne retient que les chiffres placés après la virgule. Ils constituent une suite infinie $a_0 a_1 \dots a_i \dots$ où chaque a_i est un élément de la liste des chiffres possibles en base 13 : 0, 1, ..., 9, A, B, C. Les chiffres A, B et C sont les trois nouveaux chiffres qu'il faut ajouter aux chiffres du système décimal pour calculer en base 13, ils représentent respectivement 10, 11, et 12 unités.

- Si la suite $a_0 a_1 \dots a_i \dots$ est de la forme $b_1 \dots b_n A c_1 \dots c_m C d_1 \dots d_k \dots$ avec les b_i quelconques et les c_i et les d_i pris seulement parmi 0, 1, ..., 9, alors on pose $f(t) = + c_1 \dots c_m d_1 \dots d_k \dots$ en lisant cette fois la suite de symboles comme un nombre réel écrit en base 10 avec une virgule.

- Si la suite $a_0 a_1 \dots a_i \dots$ est de la forme $b_1 \dots b_n B c_1 \dots c_m C d_1 \dots d_k \dots$ avec les b_i quelconques et les c_i et les d_i pris seulement parmi 0, 1, ..., 9, alors on pose $f(t) = - c_1 \dots c_m d_1 \dots d_k \dots$ en lisant la suite de symboles comme un nombre réel négatif écrit en base 10 avec une virgule.

- Sinon, on pose $f(t) = 0$. Dit autrement : si dans la suite des chiffres après la virgule dans l'écriture de t en base 13, à partir d'un certain chiffre il n'y plus qu'un seul A et un seul C, le A avant le C, et pas de B, on oublie ce qui est devant ce A, on lit le A comme un +, on lit le C comme une virgule et le tout comme si c'était un nombre en base 10. Même chose

avec B et C à la place de A et C, avec pour résultat un nombre négatif. Si on n'est dans aucun de ces deux cas, on pose $f(t) = 0$.

Exemple. Soit le nombre t dont le développement en base 13 est

7B9,4A2ABC34A3C1411... 11...

On ne retient dans un premier temps que la suite de chiffres après la virgule **4A2ABC34A3C1411... 11...**

On repère les derniers A et C, s'il y en a qui ne sont suivis par aucun chiffre A, B, C.

C'est le cas ici. On oublie ce qui est devant le A repéré. Cela donne **A3C1411... 11...** ;

on transforme le A en + et le C en virgule. On arrive alors à **+ 3,1411... 11...** qu'on lit comme un nombre en base 10. C'est la valeur de la fonction de Conway au point t .

Démontrons maintenant que f possède la propriété extravagante annoncée.

Quels que soient les nombres réels r et s avec $r < s$, et quel que soit le nombre réel y , il existe un nombre t entre r et s tel que $f(t) = y$.

La démonstration est très rapide... même s'il faut se concentrer un peu !

Soit un nombre y qui en base 10 s'écrit $+ c_1 \dots c_m d_1 \dots d_k \dots$ (pour un nombre négatif le raisonnement s'adapte sans mal). On veut trouver un nombre t tel que $f(t) = y$. On prend pour t un nombre dont l'écriture en base 13 est de la forme suivante **S e₁... e_n b₁... b_n A c₁... c_m C d₁... d_k...** où S est le signe + ou -. Un tel nombre t a bien pour image par f le nombre y voulu (relire la définition).

On peut maintenant choisir comme on veut le signe de t et toute la partie $e_1 \dots e_n b_1 \dots b_n$. Cela permet de placer t dans l'intervalle des nombres entre r et s . La démonstration est finie !



John Horton Conway
(1937-2020)

lesquelles $V(t, t')$ ne dépasse jamais une valeur donnée. Ce sont en quelque sorte des courbes de Peano économes : elles font le travail de recouvrir le carré $[0, 1] \times [0, 1]$, sans jamais aller inutilement vite.

Pour établir leur résultat, les chercheurs considèrent la classe des courbes de Peano décomposables en sous-trajets identiques au trajet global. La courbe initiale de Peano (voir l'encadré 1) se décompose en 9 morceaux semblables pour l'essentiel à la courbe initiale avec une réduction dans un rapport de 3 à 1. C'est la nature fractale et autosimilaire de la courbe de Peano qui permet une telle décomposition. Le nombre de composants est le « genre » de la courbe de Peano : il est donc de 9 pour la courbe proposée en 1890 par Peano.

Yuri Malykhin et Evgeny Shchepin ont découvert une nouvelle courbe de Peano dénommée YE, selon les initiales de leurs prénoms. Cette courbe (voir l'encadré 1), qui est de genre 25, est telle que $V(t, t')$ ne dépasse jamais $5 + 43/73 = 5,589041\dots$ Cette valeur, d'après leur démonstration, est la plus petite qu'on puisse obtenir en considérant des courbes de Peano de genre inférieur à 36. De plus, la courbe YE est unique aux symétries près, ce qui fait d'elle une courbe optimale vraiment singulière.

VALEURS INTERMÉDIAIRES

Le point mobile sur une courbe de Peano est localement très agité, mais sans nécessairement beaucoup se déplacer : le point bouge quasiment sur place en changeant sans cesse de direction et passe lentement d'une zone à une autre du carré. Cependant comme la fonction $p(t) = (x(t), y(t))$ pour toute courbe de Peano est continue, on peut être certain que chacune des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ vérifie le célèbre théorème des « valeurs intermédiaires ». Ce théorème affirme que si la valeur d'une fonction f est un nombre réel (appartenant à l'ensemble $\mathbb{R}$) et que cette fonction est continue sur un intervalle $I = [a, b]$ alors pour chaque valeur C entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe une valeur de c dans $[a, b]$, telle que $f(c) = C$.

Ce théorème de base de l'analyse est étrange car il semble évident : si f est continue, elle ne fait pas de saut ! Cependant cette évidence est illusoire, car par exemple si on considère les fonctions continues qui envoient un nombre rationnel (un quotient de nombres entiers) de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels dans le même ensemble $\mathbb{Q}$, le théorème des valeurs intermédiaires est faux. Ainsi, par exemple, la fonction $f(x) = x^2 - 2$ est continue sur l'ensemble des nombres rationnels entre 0 et 2 et on a $f(0) = -2$, $f(2) = 2$; il n'y a aucun nombre rationnel x tel que $f(x) = 0$, puisque la solution de $x^2 - 2 = 0$, le nombre $\sqrt{2}$, est irrationnel.

En revanche, le théorème des valeurs intermédiaires est valable pour l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, et pour démontrer ce théorème il ne suffit pas de dire qu'il est évident, il faut identifier ce qui fait qu'avec $\mathbb{R}$ il est vrai et pas avec $\mathbb{Q}$. Ce qui est étonnant, c'est que dans tout intervalle de valeurs entre a et b , aussi petit soit-il, il existe une infinité de nombres rationnels et, pourtant, il y a « entre eux » une infinité (plus grande encore) de nombres réels qui ne sont pas rationnels.

La première démonstration satisfaisante du théorème est due à l'Autrichien Bernard Bolzano qui, dans un article de 1817, la présente en réfutant celles proposées avant lui qui se contentaient, plus ou moins, de faire appel à l'intuition géométrique et d'affirmer que le résultat était « évident ».

L'idée de Bolzano s'appuie sur une propriété particulière des nombres réels $\mathbb{R}$: si une suite de nombres réels est croissante et majorée, elle a un point limite qui est dans $\mathbb{R}$, propriété fautive si on remplace $\mathbb{R}$ par l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. Le texte de Bolzano ne sera vraiment diffusé qu'avec la publication de ses travaux en 1848. Ces progrès de la rigueur en mathématiques sont importants et c'est grâce à eux que l'analyse est devenue précise et aussi puissante... même si elle est parfois ennuyeuse pour les étudiants qui l'apprennent !

Heureusement, le théorème des valeurs intermédiaires a des conséquences moins arides (voir l'encadré 3).

PARTOUT À CHAQUE INSTANT

Les fonctions f d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui pour tout a et b avec $a < b$ prennent toutes les valeurs possibles entre $f(a)$ et $f(b)$, sont dénommées « fonction de Darboux » en l'honneur du mathématicien français Gaston Darboux qui les étudia à la fin du XIX^e siècle. Le théorème des valeurs intermédiaires implique que les fonctions continues d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des fonctions de Darboux. La question se pose de savoir si l'inverse est vrai : est-ce que toute fonction de Darboux est nécessairement continue ? Darboux pensait que non, et critiquait les mathématiciens qui voulaient définir la continuité à l'aide de la propriété qui définit les fonctions de Darboux.

Dans son livre paru en 1904 (voir bibliographie), le mathématicien français Henri Lebesgue a proposé une fonction de Darboux qui n'est continue en aucun point. Cette fonction est définie pour les nombres entre 0 et 1, et ne prend que des valeurs entre 0 et 1 (c'est une fonction de $[0,1]$ dans lui-même). Elle prouve que la réciproque du théorème des valeurs intermédiaires est fautive. On peut cependant faire plus étonnant encore : une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie tout intervalle (non réduit à un point) sur $\mathbb{R}$ tout entier,

et qui sera en conséquence une fonction de Darboux non continue.

Cette fonction $f(t)$ proposée par John Conway mérite d'être dénommée « la fonction divine de Conway », car si on assimile la variable t au temps, $f(t)$ passe partout dans $\mathbb{R}$ quand t varie dans un intervalle de temps (non réduit à un point) aussi petit qu'il soit. Telle une entité divine, la fonction $f(t)$ est alors présente partout, tout le temps. C'est un peu compliqué, mais cela en vaut la peine : si vous avez un peu de courage, lisez l'encadré 4 qui détaille la définition et le fonctionnement de cette incroyable fonction divine.

On remarquera que si on voulait dessiner le graphe de la fonction divine de Conway, quelle que soit la finesse du trait utilisé, on serait obligé de dessiner une surface entièrement noire. À l'inverse des courbes de Peano qui possèdent de multiples applications en physique pour concevoir par exemple des antennes ou, en informatique, pour transformer des listes en tableaux, il est peu probable que la fonction divine de Conway devienne un objet banal du bestiaire mathématique d'utilité reconnue.

AUTRES FONCTIONS... ENCORE PLUS DIVINES

Peut-être que pour vraiment mériter le nom de fonction divine, une fonction devrait sans cesse passer partout dans les espaces à plus de dimensions $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et non pas seulement dans $\mathbb{R}$. Pour $\mathbb{R}^2$, ce n'est pas difficile, il suffit de composer la fonction divine de Conway $f(t)$ avec une fonction $h(t)$ qui envoie $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$, une fonction dont l'existence se déduit assez facilement des courbes de Peano. La fonction $h(f(t))$ a en effet la propriété que lorsque t parcourt un intervalle de $\mathbb{R}$ aussi petit soit-il, alors $h(f(t))$ parcourt $\mathbb{R}^2$ tout entier. La méthode s'adapte à $\mathbb{R}^3$ ou même à l'espace à n dimensions $\mathbb{R}^n$.

Si on est plus exigeant avec les fonctions $h(t)$ qui veulent « imiter Dieu », on pourrait demander qu'elles soient continues. Pour le coup, c'est impossible car, d'après un théorème d'analyse, l'image par une fonction continue d'un intervalle fermé ne peut pas être $\mathbb{R}$ entier. En revanche, c'est possible, si on veut une fonction $h(t)$ continue de $\mathbb{R}$ dans $E = [0,1] \times [0,1]$ ou $E = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ qui visite chaque point de E quand t parcourt un intervalle de temps d'une durée au moins ε , avec ε fixé éventuellement très petit, mais positif, par exemple un millionième de seconde. La solution consiste à utiliser une fonction de Peano qui revient à son point de départ, $f(0) = f(1)$. On la recopie une infinité de fois en la comprimant sur chaque intervalle de la forme $[n\varepsilon, n\varepsilon + \varepsilon]$ pour n entier positif ou négatif. Assez de folies pour aujourd'hui, arrêtons-nous là... ■

BIBLIOGRAPHIE

Y. Malykhin et E. Shchepin, **Search of fractal space-filling curves with minimal dilation**, prépublication arXiv : 2103.07344, 2021.

Y. Malykhin et E. V. Shchepin, **Minimal self-similar Peano curve of genus 5x5**, *Doklady Mathematics*, 2020.

B. Jouanneau, **Labyrinthe de la cathédrale de Chartres**, 2021. bit.ly/PLS535_LC_Chartres

B. Polster, **The fix-the-wobbly-table theorem**, vidéo sur YouTube, 2018. bit.ly/PLS535_LC_Table

G. Oman, **The converse of the intermediate value theorem : From Conway to Cantor to cosets and beyond**, *Missouri J. Math. Sci.*, 2014.

M. Bader, **Space-Filling Curves**, Springer, 2013.

E. V. Shchepin et K. E. Bauman, **Minimal Peano curve**, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008.

B. Baritompa et al., **Before carrying out these transformations, make sure the glasses are not filled too full**, *The Mathematical Intelligencer*, 2007.

H. Lebesgue, **Leçon sur l'intégration**, 1904.