

En revanche, le théorème des valeurs intermédiaires est valable pour l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, et pour démontrer ce théorème il ne suffit pas de dire qu'il est évident, il faut identifier ce qui fait qu'avec $\mathbb{R}$ il est vrai et pas avec $\mathbb{Q}$. Ce qui est étonnant, c'est que dans tout intervalle de valeurs entre a et b , aussi petit soit-il, il existe une infinité de nombres rationnels et, pourtant, il y a « entre eux » une infinité (plus grande encore) de nombres réels qui ne sont pas rationnels.

La première démonstration satisfaisante du théorème est due à l'Autrichien Bernard Bolzano qui, dans un article de 1817, la présente en réfutant celles proposées avant lui qui se contentaient, plus ou moins, de faire appel à l'intuition géométrique et d'affirmer que le résultat était « évident ».

L'idée de Bolzano s'appuie sur une propriété particulière des nombres réels $\mathbb{R}$: si une suite de nombres réels est croissante et majorée, elle a un point limite qui est dans $\mathbb{R}$, propriété fautive si on remplace $\mathbb{R}$ par l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. Le texte de Bolzano ne sera vraiment diffusé qu'avec la publication de ses travaux en 1848. Ces progrès de la rigueur en mathématiques sont importants et c'est grâce à eux que l'analyse est devenue précise et aussi puissante... même si elle est parfois ennuyeuse pour les étudiants qui l'apprennent !

Heureusement, le théorème des valeurs intermédiaires a des conséquences moins arides (voir l'encadré 3).

PARTOUT À CHAQUE INSTANT

Les fonctions f d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui pour tout a et b avec $a < b$ prennent toutes les valeurs possibles entre $f(a)$ et $f(b)$, sont dénommées « fonction de Darboux » en l'honneur du mathématicien français Gaston Darboux qui les étudia à la fin du XIX^e siècle. Le théorème des valeurs intermédiaires implique que les fonctions continues d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des fonctions de Darboux. La question se pose de savoir si l'inverse est vrai : est-ce que toute fonction de Darboux est nécessairement continue ? Darboux pensait que non, et critiquait les mathématiciens qui voulaient définir la continuité à l'aide de la propriété qui définit les fonctions de Darboux.

Dans son livre paru en 1904 (voir bibliographie), le mathématicien français Henri Lebesgue a proposé une fonction de Darboux qui n'est continue en aucun point. Cette fonction est définie pour les nombres entre 0 et 1, et ne prend que des valeurs entre 0 et 1 (c'est une fonction de $[0,1]$ dans lui-même). Elle prouve que la réciproque du théorème des valeurs intermédiaires est fautive. On peut cependant faire plus étonnant encore : une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie tout intervalle (non réduit à un point) sur $\mathbb{R}$ tout entier,

et qui sera en conséquence une fonction de Darboux non continue.

Cette fonction $f(t)$ proposée par John Conway mérite d'être dénommée « la fonction divine de Conway », car si on assimile la variable t au temps, $f(t)$ passe partout dans $\mathbb{R}$ quand t varie dans un intervalle de temps (non réduit à un point) aussi petit qu'il soit. Telle une entité divine, la fonction $f(t)$ est alors présente partout, tout le temps. C'est un peu compliqué, mais cela en vaut la peine : si vous avez un peu de courage, lisez l'encadré 4 qui détaille la définition et le fonctionnement de cette incroyable fonction divine.

On remarquera que si on voulait dessiner le graphe de la fonction divine de Conway, quelle que soit la finesse du trait utilisé, on serait obligé de dessiner une surface entièrement noire. À l'inverse des courbes de Peano qui possèdent de multiples applications en physique pour concevoir par exemple des antennes ou, en informatique, pour transformer des listes en tableaux, il est peu probable que la fonction divine de Conway devienne un objet banal du bestiaire mathématique d'utilité reconnue.

AUTRES FONCTIONS... ENCORE PLUS DIVINES

Peut-être que pour vraiment mériter le nom de fonction divine, une fonction devrait sans cesse passer partout dans les espaces à plus de dimensions $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et non pas seulement dans $\mathbb{R}$. Pour $\mathbb{R}^2$, ce n'est pas difficile, il suffit de composer la fonction divine de Conway $f(t)$ avec une fonction $h(t)$ qui envoie $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$, une fonction dont l'existence se déduit assez facilement des courbes de Peano. La fonction $h(f(t))$ a en effet la propriété que lorsque t parcourt un intervalle de $\mathbb{R}$ aussi petit soit-il, alors $h(f(t))$ parcourt $\mathbb{R}^2$ tout entier. La méthode s'adapte à $\mathbb{R}^3$ ou même à l'espace à n dimensions $\mathbb{R}^n$.

Si on est plus exigeant avec les fonctions $h(t)$ qui veulent « imiter Dieu », on pourrait demander qu'elles soient continues. Pour le coup, c'est impossible car, d'après un théorème d'analyse, l'image par une fonction continue d'un intervalle fermé ne peut pas être $\mathbb{R}$ entier. En revanche, c'est possible, si on veut une fonction $h(t)$ continue de $\mathbb{R}$ dans $E = [0,1] \times [0,1]$ ou $E = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ qui visite chaque point de E quand t parcourt un intervalle de temps d'une durée au moins ε , avec ε fixé éventuellement très petit, mais positif, par exemple un millionième de seconde. La solution consiste à utiliser une fonction de Peano qui revient à son point de départ, $f(0) = f(1)$. On la recopie une infinité de fois en la comprimant sur chaque intervalle de la forme $[n\varepsilon, n\varepsilon + \varepsilon]$ pour n entier positif ou négatif. Assez de folies pour aujourd'hui, arrêtons-nous là... ■

BIBLIOGRAPHIE

Y. Malykhin et E. Shchepin, **Search of fractal space-filling curves with minimal dilation**, prépublication arXiv : 2103.07344, 2021.

Y. Malykhin et E. V. Shchepin, **Minimal self-similar Peano curve of genus 5x5**, *Doklady Mathematics*, 2020.

B. Jouanneau, **Labyrinthe de la cathédrale de Chartres**, 2021. bit.ly/PLS535_LC_Chartres

B. Polster, **The fix-the-wobbly-table theorem**, vidéo sur YouTube, 2018. bit.ly/PLS535_LC_Table

G. Oman, **The converse of the intermediate value theorem : From Conway to Cantor to cosets and beyond**, *Missouri J. Math. Sci.*, 2014.

M. Bader, **Space-Filling Curves**, Springer, 2013.

E. V. Shchepin et K. E. Bauman, **Minimal Peano curve**, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008.

B. Baritompä et al., **Before carrying out these transformations, make sure the glasses are not filled too full**, *The Mathematical Intelligencer*, 2007.

H. Lebesgue, **Leçon sur l'intégration**, 1904.